2ª FASE - I OLIMPÍADA ALEGRENSE DE MATEMÁTICA - OAMAT 2023

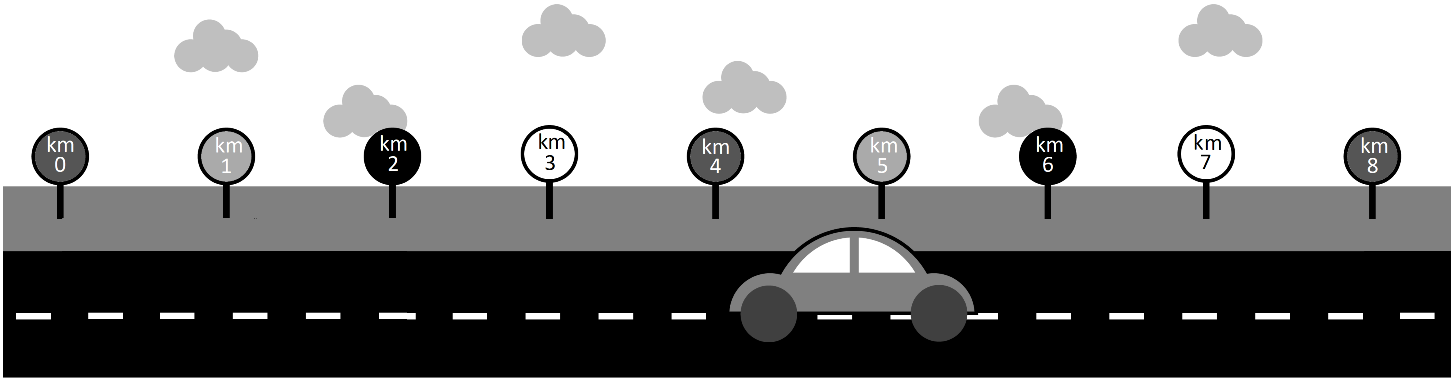
NÍVEL 2 - 8° E 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

OLIMPÍADA ALEGRENSE DE MATEMÁTICA OAMAT

Nome completo:____________________________________

Série:__________ Escola:____________________________

Questão 1: Pedro está realizando uma viagem de carro na fictícia cidade de Brasilândia, onde há placas na estrada a cada quilômetro.



a) Seu ponto de partida foi na placa do quilômetro 736 (km 736) e o ponto final de sua viagem na placa do quilômetro 2452 (km 2452). Qual a distância total percorrida por Pedro?

A distância total percorrida por Pedro foi de $2452 - 736 = 1716$ km.

b) Se seu carro consome 1 litro de gasolina a cada 13 quilômetros percorridos, e o preço da gasolina é de 6 reais o litro, quanto Pedro gastou com gasolina (em reais) nessa viagem?

Como seu carro consome 1 litro a cada 13 quilômetros percorridos, e Pedro percorreu 1716 km, então seu carro gastou $1716 \div 13 = 132$ litros.

Com o preço da gasolina a 6 reais o litro, Pedro gastou $132 \cdot 6 = 792$ reais nessa viagem.

c) As placas da Brasilândia são coloridas da seguinte forma: A placa do km 0 é verde, a placa do km 1 é amarela, a placa do km 2 é azul, do km 3 branca, do km 4 verde, do km 5 amarela, do km 6 azul, do km 7 branca, do km 8 verde, e assim por diante. Qual a cor da placa do ponto final da viagem de Pedro?

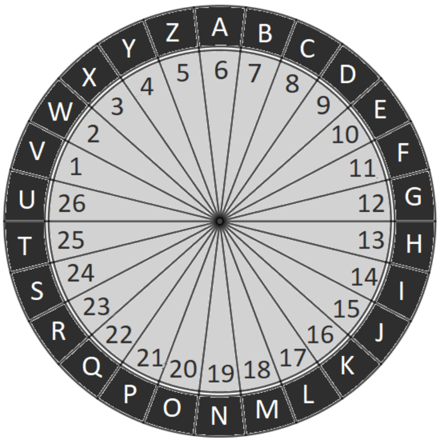
Observe que a cada 4 quilômetros as placas repetem as cores. As placas verdes são nos quilômetros 0, 4, 8, 12, 16, ..., ou seja, nos múltiplos de 4.

A viagem de Pedro termina no quilômetro 2452, que é um múltiplo de 4, pois $2452 = 4 \cdot 613$, portanto a placa do km 2452 é verde.

d) Na viagem de volta Pedro esqueceu de abastecer e o combustível de seu carro acabou. Ele pegou uma garrafa e levou até o posto para colocar gasolina. Ele encheu $\frac{3}{4}$ da garrafa, e transferiu para o tanque do carro, enchendo $\dfrac{1}{16}$ do tanque. Pedro precisaria de no mínimo quantas garrafas cheias para encher seu tanque?

Como $\dfrac{3}{4}$ da garrafa enche $\dfrac{1}{16}$ do tanque, Pedro precisa de 16 vezes essa quantidade para encher o tanque todo de seu carro. Portanto ele irá precisar de $16 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{48}{4} = 12$ garrafas cheias para encher o tanque.

Questão 2: Um método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado **chave** do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por traços. Por exemplo, na figura abaixo a **chave** do código é 6, e a palavra PAIS é codificada como 21-6-14-24.

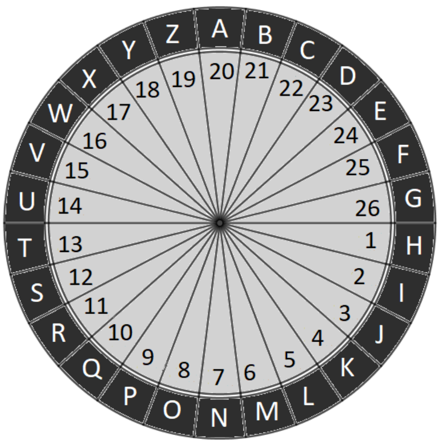


a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 24-26-8-26-23-14.

Como a chave utilizada foi a mesma da figura acima podemos aproveitá-la. Pela figura vemos que 24 corresponde a letra S, 26 corresponde a letra U, 8 corresponde a letra C, 23 corresponde a letra R e 14 corresponde a letra I.

Portanto a palavra codificada foi SUCURI.

b) Codifique a palavra OAMAT usando a **chave** 20.



Fazendo uma figura semelhante a do enunciado, porém com a chave 20, vemos que O = 8, A = 20, M = 6, A = 20 e T = 13.

Portanto, codificando a palavra OAMAT utilizando a chave 20, obtemos 8-20-6-20-13.

c) Bento codificou uma palavra com 4 letras com a **chave** 20, mas esqueceu-se de colocar os traços e escreveu 2620138. Ajude Bento, colocando os traços que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

Colocando os traços que Bento esqueceu, vemos que a única possibilidade é 26-20-13-8 (devemos lembrar que não podem ocorrer números maiores do que 26).

Utilizando a chave 20, vemos que 26 corresponde a letra G, 20 corresponde a letra A, 13 corresponde a letra T e 8 corresponde a letra O.

Portanto a palavra codificada por Bento foi GATO.

d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras A, B e C é 52. Qual é essa chave?

Como A, B e C são letras consecutivas, uma primeira possibilidade seria encontrar três números inteiros consecutivos cuja soma seja 52.

Se chamarmos o primeiro número de x, o segundo é $x + 1$ e o terceiro $x + 2$, daí

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 52$$

$$3x + 3 = 52$$

$$3x = 52 - 3 = 49$$

$$3x = 49$$

$$x = \frac{49}{3}$$

Note que, neste caso não temos uma divisão exata, ou seja, um número inteiro. Portanto A, B e C não podem corresponder a três números consecutivos. Porém existem três números seguidos no disco cuja soma dá 52, são eles: $25 - 26 - 1$. Logo teremos A correspondendo ao número 25, B ao número 26 e C ao número 1. E portanto, a chave, neste caso, é 25.

Questão 3: a) Helena escreveu alguns números no tabuleiro 3 x 3 abaixo. Ela decidiu que em cada linha e em cada coluna devem aparecer somente os números 1,2 e 3 sem repetir. Qual a soma dos números que ela escreveu no lugar das letras A e B?

Observe que na casa destacada em azul na figura abaixo o número deve obrigatoriamente ser o 3, pois já tem o 1 na mesma linha e o 2 na mesma coluna.

Após isso, observe que na primeira linha já foi escrito os números 1 e 3, portanto o número na casa destacada em rosa deve ser obrigatoriamente o 2.

Como na primeira coluna já foi escrito o número 2, então A e B devem ser 1 e 3, não necessariamente nesta ordem. Portanto $A + B = 4$.

		1
A	2	
B		

b) Helena quer escrever os números de 1 até 12 nas casinhas de um tabuleiro 3 x 4, sem repetir números. Na figura abaixo, dê um exemplo do preenchimento de Helena de modo que a soma dos números nas três linhas seja a mesma.

Observe que a soma de todos os números que Helena quer escrever é

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.$$

Para que as três linhas tenham a mesma soma Helena deve escrever os números de forma que cada linha some $78 \div 3 = 26$. Na figura abaixo apresentamos uma da forma de Helena escrever tais números (existem outras formas).

1	2	11	12
3	4	9	10
5	6	7	8

c) É possível que Helena consiga obter uma distribuição nesse tabuleiro 3 x 4 de modo que a soma dos números em cada coluna seja sempre a mesma? Se sim dê um exemplo de preenchimento na figura abaixo, se não explique o porque.

Como visto no item(b) a soma de todos os números que Helena quer escrever é 78.

Para que as quatro colunas tenham a mesma soma Helena deve escrever os números de forma que cada coluna some $78 \div 4 = 19,5$. Porém, como todos os números que Helena quer escrever são inteiros, é impossível obter a soma de 19,5 em cada coluna.

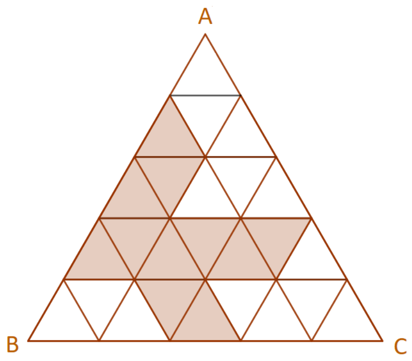
d) Helena agora esta preenchendo um quadrado mágico, onde a soma dos números em cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico abaixo que Helena começou a preencher, qual o valor de x?

Chamaremos de y o número escrito na casa destacada em azul na figura abaixo. Como cada linha e diagonal possuem a mesma soma, podemos escrever:

$$26 + 14 + y = 13 + x + y$$
$$26 + 14 = 13 + x$$
$$x = 26 + 14 - 13$$
$$x = 27$$

1	14	x
26		13

Questão 4: O triângulo equilátero ABC da figura abaixo é formado por 25 triângulos equiláteros menores. A medida do perímetro da figura pintada é de 52 metros.



a) Qual a medida do perímetro do triângulo ABC?

Observe que a figura pintada acima é formada por 13 lados de triângulos equiláteros pequenos. Como seu perímetro é 52 metros, concluímos que o lado de cada triângulo mede $52 \div 13 = 4$ metros.

Temos que o triângulo ABC é formado por 15 lados de triângulos equiláteros pequenos, e cada lado mede 4 metros. Portanto o perímetro do triângulo ABC é $15 \cdot 4 = 60$ metros.

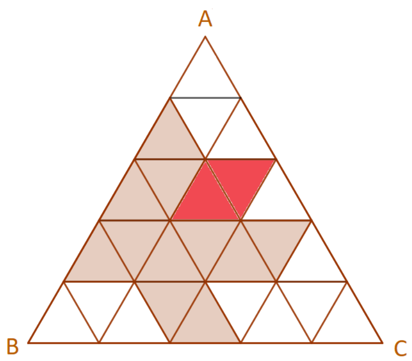
b) Sabendo que a altura de um triângulo equilátero é dada por $h = \dfrac{\sqrt{3}\,L}{2}$, onde L é a medida do lado do triângulo, calcule a área da figura pintada.

Como o lado de cada triângulo equilátero pequeno é 4 metros, então sua altura é $h = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 2 \cdot \sqrt{3}$ metros. Portanto a área de cada triângulo pequeno é $A = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3}\,m^2$.

Como a figura pintada é formada por 11 triângulos equiláteros pequenos, então sua área total é de $11 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 44\sqrt{3}\,m^2$.

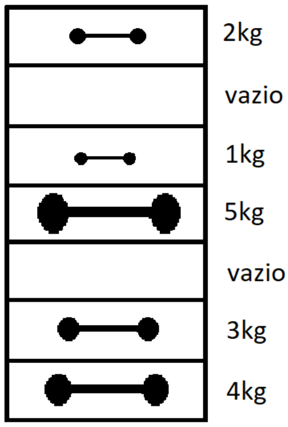
c) Pintando triângulos menores, podemos aumentar a área da figura pintada, sem mudar o seu perímetro. Na figura abaixo pinte triângulos menores de forma a acontecer isso.

Existem diversas formas de se fazer isso, um exemplo está mostrado na figura abaixo, onde os triângulos pintados estão destacados em vermelho.



Questão 5: Em uma academia os pesos são colocados em uma armação que tem espaço para 7 pesos, porém tal academia possui apenas 5, que são pesos de 1kg, 2kg, 3kg, 4kg e 5kg.

a) Se o dono da academia deseja arrumar os pesos na armação em qualquer ordem, de quantas maneiras ele pode fazer isso? A figura abaixo mostra um exemplo de arrumação.



Observe que o primeiro peso pode ser alocado em qualquer um dos 7 espaços disponíveis. Após isso, o segundo peso pode ser alocado em qualquer um dos 6 espaços restantes. O terceiro em qualquer um dos 5 espaços restantes, o quarto em qualquer um dos 4 espaços restantes, até o quinto e último peso que terá 3 espaços para ser alocado. Portanto pelo princípio multiplicativo, temos $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ possibilidades.

b) Após arrumar em uma ordem qualquer, o dono da academia anota o número de acordo com a ordem dos pesos, colocando zero onde não tem peso. Por exemplo, na configuração da figura do item (a) ele anota o número 2.015.034. Se os pesos forem colocados de forma aleatória na armação, qual a probabilidade do dono da academia ter anotado um número maior do que 4.500.000?

Vamos separar este problema em dois casos:

1º Caso: O dono da academia anotar um número entre 4.500.000 e 5.000.000. Para que isso ocorra deve-se ter obrigatoriamente o peso de 4kg no primeiro espaço da armação e o de 5kg no segundo espaço. Podemos então alocar o peso de 3kg em qualquer um dos 5 espaços restantes, após isso, o de 2 kg em qualquer um dos 4 espaços restantes e o de 1 kg em 3 espaços restantes. Portanto o número de possibilidades de isso ocorrer é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2º Caso: O dono da academia anotar um número maior do que 5.000.000. Para que isso ocorra deve-se ter obrigatoriamente o peso de 5kg no primeiro espaço da armação. Podemos então alocar o peso de 4kg em qualquer um dos 6 espaços restantes, após isso, o de 3 kg em qualquer um dos 5 espaços restantes, o de 2 kg em 4 espaços restantes e o de 1 kg em 3 espaços restantes. Portanto o número de possibilidades de isso ocorrer é $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Portanto existem $60 + 360 = 420$ arrumações que geram um número maior do que 4.500.000, em um total de 2520 possibilidades de arrumação (encontradas no item (a)). Então a probabilidade pedida é $\dfrac{420}{2520} = \dfrac{1}{6} \approx 16,6\%$.

c) Se o dono da academia deseja arrumar os pesos na armação de cima para baixo colocando os pesos do mais leve para o mais pesado, de quantas formas ele pode fazer isso? A figura abaixo mostra um exemplo de arrumação.

Observe que se escolhermos onde serão os espaços vazios, as posições dos pesos já ficam automaticamente definidas. Portanto para escolher onde ficará o primeiro espaço vazio, temos 7 possibilidades, e o segundo, 6 possibilidades. Porém, é indiferente a ordem de escolha dos espaços vazios, então pelo princípio multiplicativo teremos $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ possibilidades.